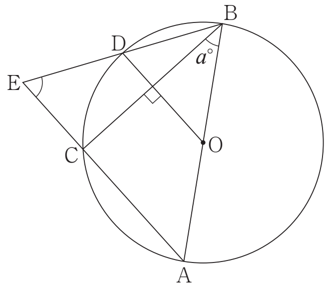
第20講　円・円周角

Step 1

1　右の図で，線分ABは円Oの直径で，2点C，Dは円Oの周上にあり，BC ⊥ ODである。また，点Eは2直線AC，BDの交点である。∠OBC = a°のとき，∠CEDの大きさをaを用いて表せ。



【奈良県】

2　図1のように，地中に半分以上埋まっている丸太がある。図2のように，この丸太の切り口は円であり，地上に出ている部分を測ると，高さが9cm，弦の長さが42cmであった。
このとき，この丸太の切り口の半径を求めなさい。
ただし，丸太の切り口は地面と垂直であるものとする。

図1

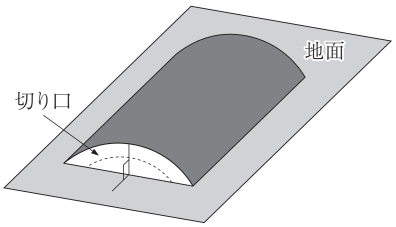
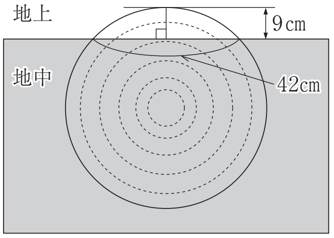
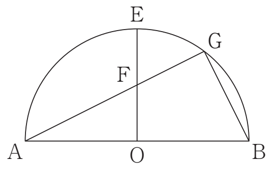


図2



【千葉県】

3　右の図のように，線分ABを直径とする半円があり，線分ABの中点を点Oとします。点Oを通り線分ABに垂直な直線と弧ABとの交点をEとし，線分OEの中点をFとします。点A，Fを通る直線と弧ABとの交点のうち，点Aと異なる点をGとします。
△AOFの面積が10cm^{2}のとき，△AGBの面積を求めなさい。



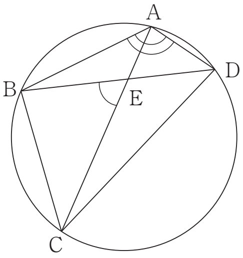
【北海道】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　2

4　図のように，円周上の４点 A，B，C，D を頂点とする四角形 ABCD があり，E は線分 AC と BD との交点である。

AB ＝ BC，円の半径が２cm のとき，次の①，②の問いに答えなさい。



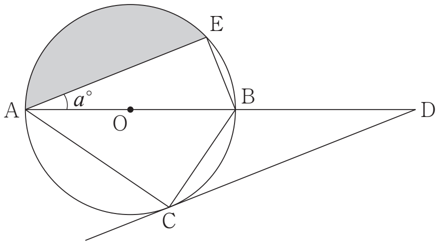
①　∠BEC ＝ a°のとき，∠BAD の大きさは何度か，a を使って表しなさい。

②　∠BEC ＝ 60°のとき，線分 BD の長さは何 cm か，求めなさい。

【愛知県】

5　右の図のように，AB を直径とする円 O の周上に，AC ＞ BC となるように点 C をとる。また，C を通る円 O の接線と直線 AB との交点を D とし，CD ∥ AE となるように円周上に点 E をとる。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。



(1)　∠EAB ＝ a°とするとき，∠BAC の大きさを a を用いて表しなさい。

(2)　円 O の半径が２cm，∠EBA ＝ 60°のとき，C を含まない方の弧 AE と線分 AE とで囲まれた部分の面積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

【栃木県】

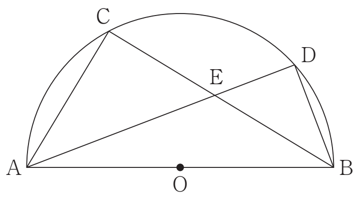
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　3

6　右の図のように，線分 AB を直径とする半円があり，点 O は線分 AB の中点である。$\overset{\frown}{AB}$上に点 C，D をこの順にとり，線分 AD と BC との交点を E とする。

AB = 10cm として，次の問いに答えなさい。

ただし，円周率は π とする。



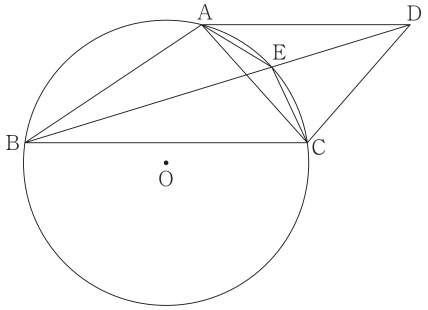
(1)　$\overset{\frown}{CD} = 2\pi$cm のとき，∠AEC の大きさを求めなさい。

(2)　∠AEC = a° のとき，$\overset{\frown}{AC}$と$\overset{\frown}{BD}$の長さの和を a を使った式で表しなさい。

【富山県】

7　右の図のように，円 O の周上に 3 点 A，B，C があり，AB = 6 cm，BC = 8 cm である。点 A を通り直線 BC に平行な直線と，∠ABC の二等分線との交点を D とすると，点 D は円 O の外部にあり，四角形 ABCD の面積は $7\sqrt{11}$cm^2 である。また，線分 BD と円 O との交点のうち B でないものを E とする。

このとき，次の問い(1)～(3)に答えよ。



(1)　線分 AD の長さを求めよ。また，直線 BC 上に BC ⊥ AH となるように点 H をとるとき，線分 AH の長さを求めよ。

(2)　線分 BD の長さを求めよ。

(3)　△ABD と△EAC の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

【京都府】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

〈 ***Note*** 〉

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

第20講　円・円周角

Step 1

1　$45° + \frac{a°}{2}$

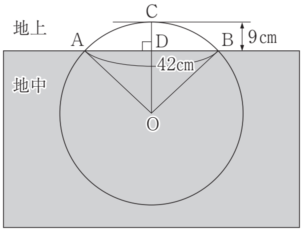
≪解説≫

線分 BC，OD の交点を F とする。線分 AB は円 O の直径で，∠ACB ＝ 90° なので，∠OFB ＝∠ACB ＝ 90° より，AE ∥ OD　よって，同位角は等しいから，∠CED ＝∠ODB ここで，△OBF において，∠BOF ＝ 180° − 90° − a° ＝ 90° − a°　また，OB ＝ OD より，△OBD は二等辺三角形だから，∠CED ＝∠ODB ＝ $\{180° - (90° - a°)\} \div 2 = 45° + \frac{a°}{2}$

2　29（cm）

≪解説≫

右図のように，この丸太の切り口の円の中心を O とし，弦を AB，地上に出ている部分の高さを CD とすると，△OAB は二等辺三角形なので，AD ＝ $\frac{1}{2}$AB ＝ $\frac{1}{2}$ × 42 ＝ 21（cm）



また，△OAD は直角三角形で，OA ＝ x cm とすると，OD ＝（x − 9）cm になるので，三平方の定理より，$x^2 = (x - 9)^2 + 21^2$ が成り立つ。$x^2 = x^2 - 18x + 81 + 441$ より，$18x = 522$　よって，$x = 29$ より，丸太の切り口の半径は 29cm。

3　32（cm^2）

≪解説≫

△AOF と△AGB において，共通な角より，∠OAF ＝∠GAB　また，条件より，∠AOF ＝ 90° で，AB は直径だから，∠AGB ＝ 90° なので，∠AOF ＝∠AGB　これより，△AOF ∽△AGB　ここで，OF ＝ FE ＝ r cm とすると，OA ＝ OB ＝ OE ＝ $2r$ cm　さらに，AF ＝ $\sqrt{OA^2 + OF^2} = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = \sqrt{5}r$（cm）　よって，△AOF と△AGB の相似比は，AF：AB ＝ $\sqrt{5}r : 4r = \sqrt{5} : 4$ だから，面積比は，$(\sqrt{5})^2 : 4^2 = 5 : 16$ となり，△AGB ＝ $10 \times \frac{16}{5} = 32$（$cm^2$）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　2

4　① $180 - a$（度）　② $2\sqrt{3}$（cm）

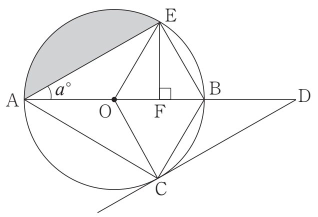
≪解説≫

① △ABCは，AB = BCの二等辺三角形だから，∠BAC = ∠BCA　また，$\overset{\frown}{CD}$の円周角だから，∠CAD = ∠CBD　よって，∠BAD = ∠BAC + ∠CAD = ∠BCA + ∠CBD
△BCEの内角の和より，∠BCA + ∠CBD = 180° − a° だから，∠BAD = 180° − a°

② 円の中心をOとし，OとB，OとDをそれぞれ結ぶ。∠BEC = 60°のとき，∠BAD = 180° − 60° = 120°　よって，$\overset{\frown}{BCD}$の中心角は，120° × 2 = 240°だから，∠BOD = 360° − 240° = 120°　これより，△BODは，OB = OD = 2 cm，∠BOD = 120°の二等辺三角形である。OからBDに垂線OHを引くと，△BOH ≡ △DOHとなるから，△BOHは30°，60°の角をもつ直角三角形である。したがって，BH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$OB = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × 2 = $\sqrt{3}$（cm）より，BD = 2BH = $2\sqrt{3}$（cm）

5　(1) $45 - \frac{a}{2}$（度）　(2) $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$（$cm^2$）

≪解説≫



(1) 右図のように点Oと点Cを結ぶと，∠OCD = 90°　また，CD ∥ AEより，∠ODC = ∠EAB = a°　△OCDの内角の和より，∠DOC = 180° − 90° − a° = 90° − a°だから，円周角の定理より，∠BAC = $\frac{1}{2}$∠DOC = 45° − $\frac{a°}{2}$

(2) ∠EBA = 60°のとき，△OBEは1辺が2 cmの正三角形なので，上図のようにEからOBに垂線EFをひくと，EF = 2 × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\sqrt{3}$（cm）　これより，△AOE = $\frac{1}{2}$ × OA × EF = $\frac{1}{2}$ × 2 × $\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$（cm^2）　∠AOE = 180° − 60° = 120°より，おうぎ形OAE = $\pi \times 2^2 \times \frac{120}{360} = \frac{4}{3}\pi$（$cm^2$）なので，求める面積は，$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$（$cm^2$）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　3

6　(1) 54（度）　(2) $\dfrac{1}{18}\pi a$（cm）

≪解説≫

(1) $\overset{\frown}{AB} = 10\pi \times \dfrac{1}{2} = 5\pi$（cm）より，$\overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{AB} = 2\pi : 5\pi = 2 : 5$　これより，$\overset{\frown}{CD}$に対する中心角は，$180^\circ \times \dfrac{2}{5} = 72^\circ$で，$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は，$72^\circ \times \dfrac{1}{2} = 36^\circ$だから，$\angle CAE = 36^\circ$　また，線分ABは直径だから，$\angle ACE = 90^\circ$　よって，△ACEにおいて，$\angle AEC = 180^\circ - (90^\circ + 36^\circ) = 54^\circ$

(2) △AEBの内角と外角の関係より，$\angle EBA + \angle EAB = \angle AEC = a^\circ$　つまり，$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角と$\overset{\frown}{BD}$に対する円周角の和がa°となるから，$\overset{\frown}{AC}$に対する中心角と$\overset{\frown}{BD}$に対する中心角の和は，$2a^\circ$。よって，$\overset{\frown}{AC}$と$\overset{\frown}{BD}$の長さの和は，$5\pi \times \dfrac{2a}{180} = \dfrac{1}{18}\pi a$（cm）

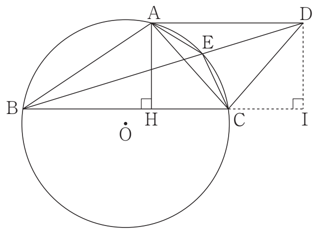
7　(1)（AD ＝）6（cm）　（AH ＝）$\sqrt{11}$（cm）　(2) $2\sqrt{33}$（cm）

(3)（△ABD：△EAC ＝）33：5

≪解説≫

(1) BDは∠ABCの二等分線だから，∠ABD ＝∠CBD　AD∥BCより，∠ADB ＝∠CBD　よって，∠ABD ＝∠ADBとなり，△ABDは二等辺三角形だから，AD ＝ AB ＝ 6 cm　また，台形ABCDの面積について，$\dfrac{1}{2} \times (6 + 8) \times AH = 7\sqrt{11}$が成り立つから，これを解いて，$AH = \sqrt{11}$（cm）

(2) 右図のように点DからBCの延長線上に垂線DIを下ろすと，HI ＝ AD ＝ 6 cm, $DI = AH = \sqrt{11}$cm　また，△ABHで三平方の定理より，$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - (\sqrt{11})^2} = 5$（cm）　よって，BI ＝ BH ＋ HI ＝ 5 ＋ 6 ＝ 11（cm）だから，△DBIで，$BD = \sqrt{BI^2 + DI^2} = \sqrt{11^2 + (\sqrt{11})^2} = 2\sqrt{33}$（cm）



(3) $\overset{\frown}{AE}$に対する円周角より，∠ACE ＝∠ABD, $\overset{\frown}{CE}$に対する円周角より，∠CAE ＝∠CBDで，仮定より，∠ABD ＝∠CBDだから，∠ACE ＝∠CAE　これより，△EACは△ABDと相似な二等辺三角形とわかる。HC ＝ BC － BH ＝ 8 － 5 ＝ 3（cm）より，△ACHで，$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{(\sqrt{11})^2 + 3^2} = 2\sqrt{5}$（cm）　よって，△ABDと△EACの相似比は，$BD : AC = 2\sqrt{33} : 2\sqrt{5} = \sqrt{33} : \sqrt{5}$となるから，求める面積比は，$(\sqrt{33})^2 : (\sqrt{5})^2 = 33 : 5$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。